数理解析研究所講究録
第889巻 1994年 49-69

1次分数型点変換，離散リッカチ方程式と離散パンルヴェ方程式

神戸大経営　伊藤利明 (Toshiaki Itoh)
筑波大電子情報　蔡　東生 (DongSheng Cai)

1．動機と研究の背景

近年，第5種までの離散パンルヴェ方程式が特異点閉じ込め法より得られるという報告がなされた[4][8][11]. パンルヴェ方程式は特殊・超越関数の理論と結びつく重要な微分方程式である．ところである微分方程式の離散表現の構成を試みる場合，本来の微分方程式の性質，解の特徴を正確に反映した離散表現でなければ意味がない．パンルヴェ方程式自身いまだ研究上の方程式であるのに，その離散表現が得られた理由を考察する．特異点閉じ込め法とはどのような意味を持つのかも明確にしたい．また特異点を持つ微分方程式の離散表現（数値解法）とはどのようなものであるかの手がかりを見いだしたい．新しい数値解法を求めて...

2．概要

以下のような内容を述べる，これらの関係を図1に示す

1．ある離散可積分系・QRT系
2．特異点閉じこめ法(SCM)のイントロ，離散版パンルヴェ・テスト？
3．QRT系からSCMによって得られる離散パンルヴェ方程式（一部）
4．QRT 系とその背景
　リッカチ方程式と離散リカッチ方程式、一次分数型点変換、
　昇下降演算子をもつ特殊関数、
　その他の離散可積分方程式が変数低減によりQRT系になる例
5．パンルヴェ方程式のハミルトニアン系表現の背景
　みかけの特異点とその運動方程式、
　パンルヴェ方程式の正準方程式表現から得られる特殊解，
　局所解のアフィン接続とSCM
6．WTC法のイントロ，偏微分方程式版パンルヴェ・テスト？
　KP方程式へのWTC法の適用，得られる特異多様体とその性質

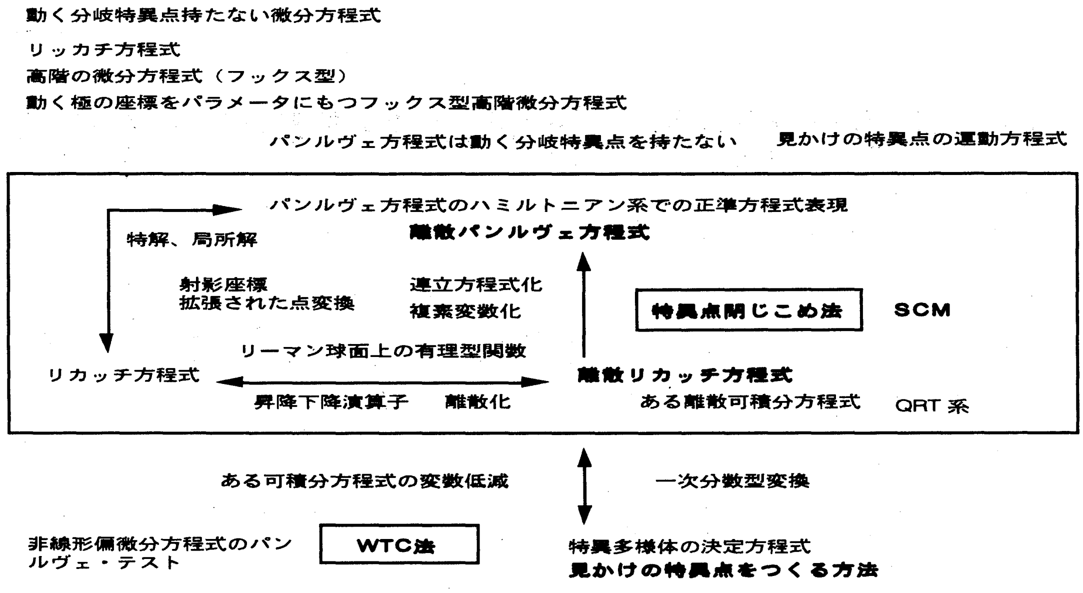


図１．各項目の関係

3．ある離散可積分系・QRT系

以下のような離散可積分方程式が報告されている[9][10],

(3.1) **QRT系：** $$\begin{aligned} x'\,x\,f_3(y) - (x'+x)f_2(y) + f_1(y) &= 0\,, \\ y'\,y\,g_3(x') - (y'+y)g_2(x') + g_1(x') &= 0\,. \end{aligned}$$

これは次のように一次分数型変換の連立方程式の形にもかける,

(3.2) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1(y) - x\,f_2(y))/(f_2(y) - x\,f_3(y)) \\ (g_1(x') - y\,g_2(x'))/(g_2(x') - y\,g_3(x')) \end{pmatrix}\,.$$

$x'=x((n+1)\Delta)$, $x=x(n\Delta)$等とし，各関数は以下のように定義され，保存量(3.4)を持つ.

(3.3) $$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A}_0(\mathbf{x}))\times(\mathbf{A}_1(\mathbf{x})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A}_0^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}))\times(\mathbf{A}_1^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}))\,, \\ \mathbf{x} &= (1, x, x^2)^{\mathrm{T}} \end{aligned} \qquad \mathbf{A}_{i=0,1} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \delta_i & \varepsilon_i & \zeta_i \\ \kappa_i & \lambda_i & \mu_i \end{pmatrix}.$$

(3.4) $$\frac{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{A}_0\mathbf{y}')}{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{A}_1\mathbf{y}')} = \frac{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{A}_0\mathbf{y})}{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{A}_1\mathbf{y})} = \frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_0\mathbf{y})}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}_1\mathbf{y})}\,.$$

QRT系は以下の様な特徴を持つ,

i) １８個の自由なパラメータを持つ，**ii)** 変数(x, x'), (y,y')に対して対称,
iii) $x=x((n-1)\Delta)=x_{n-1}$, $x'=x((n+1)\Delta)=x_{n+1}$, $y=x(n\Delta)=x_n$, $y'=x((n+2)\Delta)=x_{n+2}$ などと取ると，$f_j = g_j$ となり，以下の２階の非線形離散方程式となる,

(3.5) $$x_{n+1}x_{n-1}f_3(x_n) - (x_{n+1}+x_{n-1})f_2(x_n) + f_1(x_n) = 0\,.$$

iv) (2.11)を拡張したものに，特異点閉じ込め法を適用すると，離散パンルヴェ方程式の候補の一部を見いだせる，

v) 連立離散リッカチ方程式とみなせる，連立の一次分数型変換，

vi) 測度$(x\cdot A_1y)^{-1}$を保存する．

4．特異点閉じこめ法と離散パンルヴェ方程式

4．1　特異点閉じこめ法(SCM)のイントロ

特異点閉じ込め法を(3.5)式に適用し，Ramaniら[4][8][9][11]は離散パンルヴェ方程式を導いた．以下Ramaniらの主張を論文からそのまま引用し書く，

Conjecture:

The movable singularities of integrable mapping are confined,　i. e., they are canceled out after a finite number of steps. Moreover, the memory of the initial condition is not lost whenever a singularity is crossed.

Implimentation:

Step 1. For given a mapping, one must first find all possible ways a singularity can emerge
<--> Analogy to the first step of algorithm for ODE's where one looks for all possible leading singular behaviors. (Find all singular manifold.)

Step 2. Test the system wheather this divergence propagete in discrete time or remains (confined). <--> Reminiscent of the "search for resonances".

Step 3. Verify that indeed the singularity does not propagete beyond the divergence. <--> Resonance condition.

特異点閉じ込め法は，--もし方程式が特異な値を初期値に与えられたとしても，解が本来そのような特異性を持つ場合，解全体には何もその特異値で与えられる初期値による影響が及ばないはずである--と考る．逆に，特異性が有限な定義領域内に閉じ込められると考え，これを利用し離散方程式がこのような特異な解を持てるよう定める方法が特異点閉じ込め法といえる．Ramaniらの主張は幾分曖昧な点がある．別の見かたを後で述べる．

方程式が動く特異点（動く分岐点ではない）を持つ場合にこの方法を適用することはパンルヴェの性質を持つかの判断と同じように思える．応用も考えられている[12]．

4．2　QRT系からSCMによって得られた離散パンルヴェ方程式

以下はA. Ramaniら[1]が主張する離散パンルヴェ方程式である．これらは先のQRT系(3.5)の１８の任意パラメータを，離散化の独立変数 n の関数と拡張した離散方程式に特異点閉じ込め法を適用して得たものである．

(4.1)
$$\Delta\mathrm{PI}:\quad x_{n+1}+x_{n-1}=\frac{-x_n^2+bx_n+(\alpha n+\beta)}{x_n},$$

(4.2)
$$\Delta\mathrm{PII}:\quad x_{n+1}+x_{n-1}=\frac{x_n(\alpha n+\beta)+\gamma}{1-x_n^2},$$

(4.3)
$$\Delta\mathrm{PIII}:\quad x_{n+1}x_{n-1}=\frac{\gamma x_n^2+\zeta_0\lambda^{n/2}x_n+\mu_0\lambda^n}{\lambda^n x_n^2+\beta\lambda^{n/2}x_n+\gamma},$$

(4.4)
$$\Delta\mathrm{PIV}:\quad x_{n+1}x_{n-1}+x_n(x_{n+1}+x_{n-1})=\frac{-(\alpha n+\beta)x^3{}_n+\left[\varepsilon_0-\frac{1}{4}(\alpha n+\beta)^2\right]x_n^2+\mu}{x_n^2+(\alpha n+\beta)x_n+\left[\gamma_0+\frac{1}{4}(\alpha n+\beta)^2\right]},$$

(4.5)
$$\Delta\mathrm{PV}:\quad (2x_n-1)x_{n+1}x_{n-1}-x_n(x_{n+1}+x_{n-1})$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(\sigma-\alpha_0\lambda^{2n})x_n^3+\left[\theta+\frac{1}{4}(\sigma+\alpha_0\lambda^{2n}-2\rho_0\lambda^n)\right]x_n^2-2\mu x_n+\mu}{\alpha_0\lambda^{2n}x_n^2+(\rho_0\lambda^n-\alpha_0\lambda^{2n})x_n+\frac{1}{4}(\sigma+\alpha_0\lambda^{2n}-2\rho_0\lambda^n)}.$$

ここで $x_n=x(n)$, $x_{n\pm1}=x(n\pm1)$ であり，パラメータ $t=n\Delta+t_0$ において $\Delta=1$ として扱う．　また α，β 等はパラメータであり適当な設定で $\Delta\to0$ の極限操作をすれば，それぞれパンルヴェ方程式になる．しかし，まだ他の離散パンルヴェ方程式表現もあることがわかっている．ΔPIVまでの特解が得られ報告されている[6][19].

5．QRT系とその背景

以下の様なリッカチ方程式，離散リッカチ方程式，離散パンルヴェ方程式とのつながりが考えられる．

リッカチ方程式

$$\frac{dw}{dz} = p_0(z) + p_1(z)\,w + p_2 w^2$$

離散リッカチ方程式

$$f_1(z)\,u(z+1)u(z-1) + f_2(z)\,u(z+1) + f_3(z)\,u(z-1) + f_4(z) = 0$$

↓ **変数変換** ↓

2階同時常微分方程式

$$p_2(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \left\{\frac{d\,p_2(z)}{dz} + p_1(z)p_2(z)\right\}\frac{du}{dz} + p_0(z)p_2(z)\,u = 0$$

2階同時離散方程式

$$u(z+1) - \left\{\frac{f_2(z)}{f_1(z)} - \frac{f_3(z-1)}{f_1(z-1)}\right\}u(z) - \left\{\frac{f_2(z-1)}{f_1(z-1)}\frac{f_3(z-1)}{f_1(z-1)} - \frac{f_4(z-1)}{f_1(z-1)}\right\}u(z-1) = 0$$

特殊関数とその漸化関係

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\zeta F(\alpha,\beta,\gamma+1;\zeta) + \gamma[(\gamma-1)+(\alpha+\beta-2\gamma+1)\zeta]\,F(\alpha,\beta,\gamma;\zeta) - \gamma(\gamma-1)(1-\zeta)\,F(\alpha,\beta,\gamma-1;\zeta) = 0$$

一次分数型変換

$$f : z \rightarrow z_1 = \frac{a\,z+b}{c\,z+d},\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

動く分岐特異点を持たない　　**イソモノドロミー変換**

$$P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & ,z \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & ,\dfrac{A\,z+B}{C\,z+D} \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 & \end{matrix}\right\}$$

昇降下降演算子　　**厳密な関係式**　　**リッカチ方程式の離散表現**

$$\left(U_1(z)\frac{d}{dz} + U_2(z)\right)\left(D_1(z)\frac{d}{dz} + D_2(z)\right)u(z,\alpha) - u(z,\alpha) = 0$$

$$U_z u(\alpha\,;z) = \left(U_1(z)\frac{d}{dz} + U_2(z)\right)u(\alpha\,;z) = u(\alpha+1,z)$$

パンルヴェ方程式の特殊解

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y},$$

$$-\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x} = 0$$

連立離散リッカチ方程式

$$x'\,x\,f_3(y) - (x'+x)f_2(y) + f_1(y) = 0\,,$$

$$y'\,y\,g_3(x') - (y'+y)g_2(x') + g_1(x') = 0\,.$$

特殊解，局所解の接続

パンルヴェ方程式の
ハミルトニアン系での
正準方程式表現

離散パンルヴェ方程式

5．1　リッカチ方程式

リッカチ方程式は以下の動く分岐特異点を持たない常微分方程式で，

$$\frac{dw}{dz} = p_0(z) + p_1(z)\,w + p_2 w^2 \tag{5.1}$$

特解 w_1, w_2, w_3 と一般解は次の関係をもつ．

$$(5.2)\quad \frac{d}{dz}\left[\frac{w - w_1}{w - w_2}\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}\right] = 0\ ,\quad \begin{vmatrix} w' & 1 & w & w^2 \\ w' & 1 & w_1 & w_1^2 \\ w' & 1 & w_2 & w_2^2 \\ w' & 1 & w_3 & w_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

以下この離散表現を考える.

5．2　離散リッカチ方程式

離散リッカチ方程式の一般形として以下が知られている[1][7].

$$(5.3)\quad f_1(z)\,u(z+1)u(z-1) + f_2(z)\,u(z+1) + f_3(z)\,u(z-1) + f_4(z) = 0\ ,$$
$$u(0) = u0$$

これは一次分数型変換の形にも書ける，$u(z+1) = -\dfrac{f_3(z)\,u(z-1) + f_4(z)}{f_1u(z-1) + f_2(z)}$.
いま3つのリッカチ方程式の特解から得られる方程式系を考える.

$$f_1(z)\,u_1(z+1)u_1(z-1) + f_2(z)\,u_1(z+1) + f_3(z)\,u_1(z-1) + f_4(z) = 0\ ,\quad u_1(0) = u0_1$$
$$f_1(z)\,u_2(z+1)u_2(z-1) + f_2(z)\,u_2(z+1) + f_3(z)\,u_2(z-1) + f_4(z) = 0\ ,\quad u_2(0) = u0_2$$
$$f_1(z)\,u_3(z+1)u_3(z-1) + f_2(z)\,u_3(z+1) + f_3(z)\,u_3(z-1) + f_4(z) = 0\ ,\quad u_3(0) = u0_3$$

(5.3)を考慮し，以下の離散リッカチ方程式の別の定義式を得る

$$(5.4)\quad \begin{vmatrix} 1 & u(z+1) & u(z-1) & u(z+1)u(z-1) \\ 1 & u_1(z+1) & u_1(z-1) & u_1(z+1)u_1(z-1) \\ 1 & u_2(z+1) & u_2(z-1) & u_2(z+1)u_2(z-1) \\ 1 & u_3(z+1) & u_3(z-1) & u_3(z+1)u_3(z-1) \end{vmatrix} = 0$$

以上より，リッカチ方程式(5.1)と離散リッカチ方程式(5.3)の対応は $w' = u(z+1)-u(z-1)$, $w^2 = u(z+1)u(z-1)$ という離散近似で見いだせる．リッカチ方程式と離散リッカチ方程式は似た性質を持つことが予想される．しかしこのような近似法を見いだす問題，またどの常微分方程式の場合にもうまく行くとは限らない．また離散リッカチ方程式はリッカチ方程式の近似なのか，厳密な別の表現なのか不明である.

パンルヴェ方程式P_Iの特殊解は，リッカチ方程式をみたすものがあることがわかっており，パンルヴェ方程式のハミルトニアン系表現における正準方程式の離散表現があるならば，特別な場合離散リッカチ方程式とならねばならない．以下このような問題意識に応えるため，始めにリッカチ方程

式と離散リッカチ方程式の対応を明確にする．

変数変換$w(z) = -u'(z)/(p_2(z)\,u(z))$によりリッカチ方程式は，

$$p_2(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \left\{\frac{d\,p_2(z)}{dz} + p_1(z)p_2(z)\right\}\frac{du}{dz} + p_0(z)p_2(z)\,u = 0 \quad , \tag{5.5}$$

なる２階同時線形常微分方程式になる．２つの独立な解を u_1, u_2 とすると，一般解は$u = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z)$ と書け，$w = -u'/(p_2(z)\,u)$ に代入し以下のようになる，

$$w(z) = \frac{C_1u'_1(z) + C_2u'_2(z)}{p_2(z)\{C_1u_1(z) + C_2u_2(z)\}} \quad . \tag{5.6}$$

ここで，

$$p_0(z) = \frac{1}{p_2^2(z)}\left\{\frac{\lambda_1\lambda'_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{z-a_1} + \frac{\lambda_2\lambda'_2(a_2-a_3)(a_2-a_1)}{z-a_2} + \frac{\lambda_3\lambda'_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{z-a_3}\right\}, \tag{5.7}$$

$$p_1(z) = -\frac{1}{p_2(z)}\left\{\begin{array}{c}(\lambda_1+\lambda'_1)(z-a_2)(z-a_3)\\ +(\lambda_2+\lambda'_2)(z-a_1)(z-a_3)\\ +(\lambda_3+\lambda'_3)(z-a_1)(z-a_2)\end{array}\right\}, \tag{5.8}$$

$$p_2(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)\,, \tag{5.9}$$

と置くと(5.5)は**リーマンのP関数**となる．つまり，１）リッカチ方程式は$w = -u'/(p_2(z)\,u)$を経由しP関数の別表現となれる．２）$p_j(z)$, j=0, 1, 2 を適当にとれば，特殊関数を持つある２階同時常微分方程式とリッカチ方程式を対応させることが出来る．また解が漸化関係をもつ２階同時常微分方程式は昇下降演算子を持つが，そのような性質を持たせることが出来る．P関数など超幾何関数はその例であることが知られている．

離散リッカチ方程式(5.3)の$u(z+1)$, $u(z-1)$を改めて$w(z+1)$, $w(z)$ などと書き

$$f_1(z)\,w(z+1)w(z) + f_2(z)\,w(z+1) + f_3(z)\,w(z) + f_4(z) = 0 \quad , \tag{5.10}$$

$w(z) = \{ f_1(z)\,u(z+1) - f_2(z)\,u(z) \}/(f_1(z)\,u(z))$ なる変換をすると

$$u(z+1) - \left\{\frac{f_2(z)}{f_1(z)} - \frac{f_3(z-1)}{f_1(z-1)}\right\}u(z) - \left\{\frac{f_2(z-1)}{f_1(z-1)}\frac{f_3(z-1)}{f_1(z-1)} - \frac{f_4(z-1)}{f_1(z-1)}\right\}u(z-1) = 0\,, \tag{5.11}$$

この方程式の２つ解を $v_1(z)$, $v_2(z)$ とすると，一般解は$u(z) = C_1 v_1(z) + C_2 v_2(z)$ と書け，$w(z) = \{ f_1(z)\,u(z+1) - f_2(z)\,u(z) \}/(f_1(z)\,u(z))$ に代入し

$$(5.12)\qquad w(z)=\frac{C_1\{ f_1(z)\, v_1(z+1) - f_2(z)\, v_1(z) \}+ C_2 \{ f_1(z)\, v_2(z+1) - f_2(z)\, v_2(z) \}}{f_1(z) \{C_1 v_1(z) + C_2 v_2(z) \}},$$

(5.12)は(5.6)と非常に類似している．ここでリッカチ方程式と離散リッカチ方程式が厳密に同じになる場合について考える．

いま(5.7)-(5.9)の様に，昇下降演算子を持つ２階同時常微分方程式とリッカチ方程式を対応させるよう(5.5)の$p_j(z)$, j=0, 1, 2 を選んだものとする．この場合(5.5)は以下のように書けることになる．

$$(5.13)\qquad U_z D_z u(z, \alpha) - u(z, \alpha) = \left(U_1(z)\frac{d}{dz} + U_2(z)\right)\left(D_1(z)\frac{d}{dz} + D_2(z)\right) u(z, \alpha)- u(z, \alpha) = 0$$

解に対する昇降(U_z), 下降(D_z)演算子は以下の形になる．

$$(5.14)\qquad U_z = U_1(z)\frac{d}{dz} + U_2(z)\ ,\ \ D_z = D_1(z)\frac{d}{dz} + D_2(z)\quad .$$

ここで注目するのは，特殊関数の昇下降演算子の存在は微分の操作と差分の関係を厳密に結び付けることである．昇下降演算子は

$$U_z : v(\alpha\,; z) \to v(\alpha+1; z)\ ,\ D_z : v(\alpha\,; z) \to v(\alpha -1; z)$$

の様に作用する．従ってリッカチ方程式と離散リッカチ方程式の独立変数 z には根本的な違いがあり，離散リッカチ方程式の z は実際にはパラメータ α であり，リッカチ方程式の z は本来の独立変数である．

$$(5.15)\qquad U_z u(\alpha\,; z) = \left(U_1(z)\frac{d}{dz} + U_2(z)\right) u(\alpha\,; z) = u(\alpha+1,z)\quad ,$$

を変形し，

$$(5.16)\qquad \frac{du(\alpha\,; z)}{dz} = \frac{1}{U_1(z)}\left(u(\alpha+1,z) - U_2(z)\, u(\alpha\,; z)\right)\quad ,$$

と見なすとあたかも独立変数の差分近似のように見え混乱しやすい．逆に微分がパラメータの差分で表せるので，離散リッカチ方程式における z をここでの α と見なすことで，離散リカッ方程式とリッカチ方程式の対応がつく．以上より$p_j(z)$, j=0, 1, 2, 3 と$f_j(z)$, j= 1, 2, 3, 4 の関係も見いだすことが出来る．

リッカチ方程式は適当な変換で２階の同時線形常微分方程式に変換される．これより離散リッカチ方程式のf_jに含まれる定数係数を定数変化法で拡張して扱えば２階非同時線形常微分方程式の離散表現を扱うことができる．この事実からもQRT系が離散パンルヴェ方程式の特別な場合であることが

理解される.

いま離散リッカチ方程式を次の一次分数型変換として解釈し,

$$(5.18)\qquad u(\alpha+1;z) = -\frac{f_2(\alpha;z)\,u(\alpha-1;z)+f_1(\alpha;z)}{f_4(\alpha;z)u(\alpha-1;z)+f_3(\alpha;z)},$$

(5.16)を代入し, $u(\alpha;z)=C_1u_1(\alpha;z)+C_2u_1(\alpha;z)$ などと略記すれば以下を得る,

$$(5.19)\qquad \frac{u'(\alpha+1;z)}{p_2(\alpha;z)u(\alpha+1;z)} = -\frac{f_2(\alpha;z)u'(\alpha-1;z)+f_1(\alpha;z)\,p_2(\alpha-1;z)u(\alpha-1;z)}{f_4(\alpha;z)u'(\alpha-1;z)+f_3(\alpha;z)p_2(\alpha-1;z)u(\alpha-1;z)}.$$

これは$u'(\alpha-1;z) \to u'(\alpha+1;z)$に関するメビウス変換である. またリッカチ方程式とリーマンのP関数との対応をえた. P関数からガウスの超幾何関数は,

$$(5.20)\qquad \xi=\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\frac{z-a_1}{z-a_3},$$

$$(5.21)\qquad w=\frac{(z-a_3)^{(\lambda_1+\lambda_2)}}{(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}}u(\zeta),$$
$$\alpha=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ \beta=\lambda_1+\lambda_2+\lambda'_3,\ \gamma=1+\lambda_1-\lambda'_1,\ \gamma-\alpha-\beta=\lambda'_2+\lambda_2,$$

なる変換をすることで得られ,

$$(5.22)\qquad \xi(1-\xi)\frac{d^2w}{d\zeta^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\zeta]\frac{dw}{d\zeta}-\alpha\beta w=0,$$

$$(5.23)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma;\zeta)\equiv w=P\left\{\begin{matrix}0 & 1 & 00 & \\ 0 & 0 & \alpha & \zeta\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\},$$

とかく. $F(\alpha,\beta,\gamma;\zeta)$は以下の漸化式を満たす.

$$(5.24)\qquad \begin{aligned}&(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\zeta F(\alpha,\beta,\gamma+1;\zeta)\\ &+\gamma[(\gamma-1)+(\alpha+\beta-2\gamma+1)\zeta]\,F(\alpha,\beta,\gamma;\zeta)\\ &-\gamma(\gamma-1)(1-\zeta)\,F(\alpha,\beta,\gamma-1;\zeta)=0\end{aligned}.$$

離散リッカチ方程式からの2階差分方程式で $u(z)\leftrightarrow u(\gamma)\leftrightarrow F(\alpha,\beta,\gamma;\zeta)$ とすれば,

$$
(5.11)' \quad
\begin{aligned}
&F(\alpha, \beta, \gamma+1; \zeta) - \left\{\frac{f_2(\gamma;\zeta)}{f_1(\gamma;\zeta)} - \frac{f_3(\gamma-1;\zeta)}{f_1(\gamma-1;\zeta)}\right\} F(\alpha, \beta, \gamma\,; \xi) \\
&- \left\{\frac{f_2(\gamma-1;\zeta)}{f_1(\gamma-1;\zeta)}\frac{f_3(\gamma-1;\zeta)}{f_1(\gamma-1;\zeta)} - \frac{f_4(\gamma-1;\zeta)}{f_1(\gamma-1;\zeta)}\right\} F(\alpha, \beta, \gamma -1\,; \zeta) = 0
\end{aligned}
\quad ,
$$

となり，(5.11)と(5.11)'の係数の比較より各$f_j(\gamma;\zeta)$, j=1, 2, 3, 4を求めることが出来る．こうして背後に超幾何関数を持つ離散リッカチ方程式を構成できる．こうして得られる(5.11)'の$F(\alpha, \beta, \gamma \pm 1; \xi)$の係数は高々$\gamma$の２次式である．

６．パンルヴェ方程式のハミルトニアン系表現の背景
パンルヴェ方程式の正準方程式表現から得られる特殊解

パンルヴェ方程式のハミルトン形式表現[16][17]に注目する．パンルヴェ方程式の動く見かけの特異点の運動方程式が，ハミルトン形式表現での正準方程式系に対応する．この事実を明確にするため，始めにパンルヴェ方程式が導かれるまでの基礎的な概念を振り返っておく．

６．１　パンルヴェ方程式とそのハミルトニアン

用語の説明のため，微分方程式の特異点の幾つかを例をあげ紹介する．

$$(6.1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \;,$$

(6.1)の右辺は$x = 0$で１位の極の特異点をもつ，しかし解は　$y = \frac{y_0}{x_0}x$ でつねに正則となる．このような特異点を，**見かけの特異点**という．また以下のような２階の微分方程式において，

$$(6.2) \qquad (x-\xi)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x-\xi)P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)\,y = 0 \,,$$

ここで$P_i(x)$は$x=\xi$で正則な関数とする．$x=\xi$が**確定特異点**とは，ξ周りでの(6.2)の解のローラン級数展開の負のべきが有限項で終わるものを言う．解と(6.2)のP_1, P_2を

$$(6.3) \qquad \Phi(z)=z^{\rho}\sum_{n\geq 0}^{00} C_n z^n \,,\; C_0=1 \,,\; z = x - \xi \,,\; P_j(x) = \sum_{i\geq 0}^{00} p^{(i)}{}_j\, z^i \,,\; j=1, 2$$

とし(6.2)へ代入する，その結果のz^nの係数の低いものから係数を０とする

ことで決定方程式系が得られる．n＝0の項からは**決定方程式**(以下)が得られる，

(6.4) $\rho(\rho-1)+\rho\, p^{(1)}{}_0+p^{(2)}{}_0=0$.

この２つの根ρ_1, ρ_2を**特性指数**という．

1．ρ_1, ρ_2の差が整数でなければ２つの独立な解が定まる．
2．差が整数でない場合は対数関数を解にもつ場合が起こる．
これを**対数関数型特異点**という．
3．ρ_1, ρ_2の差が整数であっても適当な条件が，高次のnに対する決定方程式系によって満たされれば，**非対数関数型特異点**となる場合がある．このような場合の特異点を**見かけの特異点**という．

一階の**動く分岐特異点**を持つ例は，以下のような微分方程式である，

(6.5) $\frac{dy}{dx}=y^{1+k},\ k\neq 0$.

この方程式の解は，Cを積分定数として以下のようである，

(6.6) $y=\varphi(x;k)=k^{-1/k}(C-x)^{-1/k}$.

ここでCは初期値に依存するからx=Cは**動く特異点**となる，k=1のとき**動く極**，それ以外は**動く分岐点**となる．ある微分方程式の解が特異点を持ち，その特異点が初期値に依存するものを，動く特異点という．特異点の性質によって動く極，動く分岐点などという．

xの解析関数を係数とする，$y_0, y_1, y_2,\ldots, y_n$の多項式$F(y_0, y_1, y_2,\ldots, y_n)$にたいし，以下の常微分方程式を代数的微分方程式と呼ぶ．

(6.7) $F(x, y, \frac{dy}{dx},\ldots, \frac{d^n y}{dx^n})=0$,

動く分岐特異点を持たない，２階の代数的微分方程式は，１）線形方程式，２）楕円関数の方程式，３）求積できる，４）以下のような６つの方程式（**パンルヴェ方程式**）のいずれかになる．その方程式の解はパンルヴェ超越関数と呼ばれる．

(6.8) PI: $\frac{d^2w}{dt^2}=6w^2+t$,

(6.9) PII: $\dfrac{d^2w}{dt^2} = 2w^3 + tw + a$,

(6.10) PIII: $\dfrac{d^2w}{dt^2} = \dfrac{1}{w}\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2 - \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{dw}{dt}\right) + \dfrac{1}{t}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^2 + \dfrac{\delta}{w}$,

(6.11) PIV: $\dfrac{d^2w}{dt^2} = \dfrac{1}{2w}\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2 + \dfrac{2}{3}w^2 + 4tw^2 + 2(t^2 - \alpha)w + \dfrac{\beta}{w}$,

(6.12) PV: $\dfrac{d^2w}{dt^2} = \left\{\dfrac{1}{2w} - \dfrac{1}{w-1}\right\}\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2 - \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{dw}{dt}\right) + \dfrac{(w-1)^2}{t^2}\left(\alpha w - \dfrac{\beta}{w}\right) + \dfrac{\gamma w}{t} + \dfrac{\delta w(w+1)}{w-1}$,

(6.13) PVI: $\dfrac{d^2w}{dt^2} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{w} - \dfrac{1}{w-1} + \dfrac{1}{w-t}\right\}\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2 - \left\{\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{w-t}\right\}\left(\dfrac{dw}{dt}\right)$

$$+ \frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{\alpha + \frac{\beta t}{w} + \frac{\gamma(t-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta t(t-1)}{(w-t)^2}\right\} .$$

これらは拡大相空間のハミルトニアン系表現で扱える．(6.8)-(6.13)を0, 1, t, ∞ を確定特異点，wを見かけの特異点とするフックス型常微分方程式

(6.14) $\dfrac{d^2u}{dz^2} + P_1(w,t)\dfrac{du}{dz} + P_2(w,t)u = 0$

のイソモノドロミー条件から得られる．このとき，

(6.15) $x = w,\quad y = \mathrm{Res}_{(x=w)}P_2(x,t),\quad H = -\mathrm{Res}_{(x=t)}P_2(x,t)$,

(6.16) $\dfrac{dx}{d\tau} = \rho\dfrac{\partial H(x,y,t)}{\partial y},\quad -\dfrac{dy}{d\tau} = \rho\dfrac{\partial H(x,y,t)}{\partial x},\ \dfrac{dt}{d\tau} = \rho,\ \dfrac{dH}{d\tau} = \rho\dfrac{\partial H}{\partial t},\ \rho = 1$

(6.17) HI: $\dfrac{1}{2}y^2 - 2x^3 - tx$,

(6.18) HII: $\dfrac{1}{2}y^2 + (x^2 + \dfrac{1}{2}t)y - \dfrac{1}{2}(2\alpha+1)x$,

(6.19) HIII: $\dfrac{1}{t}\left\{2x^2y^2 - \left[2\eta_{00}t\,y^2 + (2\theta_0+1)x - 2\eta_0 t\right]y + \eta_{00}(\theta_0 + \theta_{00})t\lambda\right\}$,

(6.20) HIV: $2xy^2 - \{x^2 + 2tx + 2\kappa_0\}y + \theta_{00}x$,

(6.21) HV: $\dfrac{1}{t}\left\{x(x-1)^2y^2 - \left[\kappa_0(x-1)^2 + \theta x(x-1) - \eta tx\right]y + \kappa(x-1)\right\}$,

(6.22) HVI: $\dfrac{1}{t(t-1)}\left\{x(x-1)(x-t)y^2 - \left[\kappa_0(x-1)(x-t) + \kappa_1 x(x-t) + (\theta-1)x(x-1)\right]y + \kappa(x-t)\right\}$.

１階代数的微分方程式，$F(x, y, \frac{dy}{dx})=0$ において，動く分岐点を持たない場合は，以下のいずれかに帰着する．１）リッカチの方程式 ($dy/dx=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$)，２）楕円関数の方程式 ($(dy/dx)^2 -4y^3+g_2y+g_3=0$, ただしg_2 ,g_3 は複素定数)，３）代数的に求積出来る．

先に紹介されたQRT系は，リッカチの方程式の離散表現を連立した構成

になっているが，HVI(第６種パンルヴェ方程式のハミルトニアン関数)から定まる連立常微分方程式が，連立リッカチ方程式の形になることからQRT系を離散パンルヴェ方程式の候補として正当化出来ることがわかる．

結論を急ぐと，**特異点閉じ込め法は，特異点周りの局所方程式である連立リッカチ方程式を，連立離散リッカチ方程式とみなせるQRT系に適用し，定数変化法により離散的な接続を構成する方法になっているということである．**

６．２　パンルヴェ方程式の特殊解，特異点周りの局所解の接続

パンルヴェ方程式の特殊解と特異点周りの局所解が，リッカチ方程式となり，そのリッカチ方程式が超幾何関数を解に持つ２階同時微分方程式になることを紹介する．これより，パンルヴェ方程式の局所離散表現を，離散リッカチ方程式（一次分数型変換）の連立方程式で表すことを正当化でき，また特異点閉じ込め法で用いられた定数変化法が，この特殊関数の解の定数変化法に対応しかつ，局所解の接続を可能にしたと意味づけられる．

第６種パンルヴェ方程式の**特殊解**を考察する，

$$\text{(6.22)} \qquad \text{HVI:} \ \frac{1}{t(t-1)}\left\{x(x-1)(x-t)y^2-\left[\kappa_0(x-1)(x-t)+\kappa_1 x(x-t)+(\theta-1)x(x-1)\right]y+\kappa(x-t)\right\}$$

に $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}$，$-\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}$ を適用し，

$$\text{(6.23)} \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{t(t-1)}\Big(2y\, x(x-1)(x-t) - \left[\kappa_0(x-1)(x-t)+\kappa_1 x(x-t)+(\theta-1)x(x-1)\right]\Big), \\ -\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t(t-1)}\left(\frac{d}{dx}\left[x(x-1)(x-t)\, y - [*]\right] y+\kappa\right), \end{aligned}$$

なる連立微分方程式を得る．$\kappa=0$ のとき，

$$\text{(6.24)} \qquad \begin{aligned} y(t) &= 0, \\ x(t) &= \frac{t(t-1)}{\kappa_0+\kappa_1+\theta-1}\frac{d}{dt}\log((t-1)^{\kappa_0}u(t)), \end{aligned}$$

の解をもつ．ここで $u(t)$ は $\alpha=1-\kappa_1$, $\beta=\theta+1$, $\gamma=\kappa_0+\theta-1$ と設定した時のガウスの超幾何関数方程式，

$$\text{(5.22)'} \qquad t(1-t)\frac{d^2u}{dt^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\frac{du}{dt}-\alpha\beta\, u=0$$

の解である．超幾何関数は昇降下降演算子を持ち，リッカチ方程式と離散リッカチ方程式は厳密に対応でき，特解を仲介し第６種パンルヴェ方程式は離散リッカチ方程式と厳密に対応することがわかる．

第６種パンルヴェ方程式の局所解を考察する，

$$\text{(6.13)} \qquad \text{PVI:}\ \frac{d^2w}{dt^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{w}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-t}\right\}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2-\left\{\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w-t}\right\}\left(\frac{dw}{dt}\right)$$
$$+\frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2}\left\{\alpha+\frac{\beta t}{w}+\frac{\gamma(t-1)}{(w-1)^2}+\frac{\delta t(t-1)}{(w-t)^2}\right\}.$$

を $t=t_0$，$w(t_0)=0$ なる特異点まわりで 扱う．オーダーを考慮し

$$\text{(6.25)} \qquad \frac{d^2w}{dt^2}=\frac{1}{2w}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+\frac{\beta}{(t-1)^2}\frac{1}{w}+S\left(t,w,\frac{dw}{dt}\right),$$

などとし，以下を仮定し

$$\text{(6.26)} \qquad \hat{w}(t)=(t-t_0)^m\sum_{j=0}^{00}a_j(t-t_0)^j,\ m>0,\ a_0\neq 0,$$

(6.25)へ代入するなどの操作をし（厳密な証明抜き）まとめると，おおよそ以下のような形になる，ここで y_0 は技工的に導入された変数である．詳しくは文献[18]を参考にされたい．

$$\text{(6.27)} \qquad \begin{aligned}\frac{dw}{dt}&=\frac{\alpha}{t-1}+w\,y_0,\\ \frac{dy_0}{dt}&=A_0(w,t)\,y_0^2+B_0(w,t)\,y_0+C_0(w,t),\end{aligned}$$

これはリッカチ方程式の形である．また別の特異点 $w=\xi=1,t,\infty$ においても同じ形になり，

$$\text{(6.28)} \qquad \begin{aligned}\frac{dw}{dt}&=c_\xi(w,t)+b_\xi(w,t)\,y_\xi,\\ \frac{dy_\xi}{dt}&=A_\xi(w,t)\,y_\xi^2+B_\xi(w,t)\,y_\xi+C_\xi(w,t),\end{aligned}$$

と書けることがわかる．ここで $A_\xi, B_\xi, C_\xi, b_\xi, c_\xi$ は各 ξ で正則な関数で，b_ξ, c_ξ はwの高々２次の多項式を関数として持つ．パンルヴェ方程式のハミルトニアン系としての構造は，この４点$(0, 1, t, \infty)$の局所解をつなぎ合わせる変数間のアフィン変換，$y_\xi=g_{\xi\eta}(w,t)\,y_\eta+f_{\xi\eta}(w,t)$ を考慮することで得られる．各特異点付近での局所解が連立リッカチ方程式であることがわかる．

7．WTC法，偏微分方程式版パンルヴェ判定法
KP方程式へのWTC法の適用，得られる特異多様体とその性質

7．1　パンルヴェ判定法

微分方程式において，解がもつ特異点が初期条件に依存するとき，その特異点を動く特異点という．そして，すべての動く特異点が極であるならば，方程式はパンルヴェの性質をもつという．パンルヴェの性質を，動く分岐点を持たない，と定義することもできる．

7．2　パンルヴェ判定法の拡張（WTC法[14][15]）

一般に，複素変数$z_1, z_2, \ldots, z_n$の関数 $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ の特異点が，ある関数関係式

(7.1)　$$\phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \quad ,$$

で表されるとする．(7.1)を**特異多様体**とよぶ．非線形発展方程式

(7.2)　$$q_t = K[q], \qquad q = q(x, t) \quad ,$$

の解 $q(x, t)$ が，特異多様体 $\phi(x, t)=0$ のまわりで，極しかもたないならば，(7.2)はパンルヴェの性質をもつ．そのためには解 $q(x, t)$ が

(7.3)　$$q(x, t) = \frac{1}{\phi^{\alpha}(x, t)} \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x, t)\, \phi^j(x, t)$$

と展開できることである．ここでα**は整数**，q_j は特異多様体の近くで正則な関数である．一般論として，パンルヴェ判定法が積分可能性を証明しているかどうかは，まだわかっていない．

7．3　WTC法による特異多様体と一次分数型変換，メビウス変換

事実として次のようなことがわかっている，

1）WTC法を可積分な非線形微分方程式に適用し，得られる特異多様体の多くは，シュワルツ微分と呼ばれる特殊な微分形を含む方程式になる．シュワルツ微分は，メビウス変換によって形が変わらない．

2）離散可積分方程式の多くはメビウス変換(QRT) の形になっている．

3）1・2次元戸田格子の離散表現でのシュワルツ微分が，見いだされている．実際この離散表現シュワルツ微分がメビウス変換を許容す

ることも確かめられる．従ってこの１，２次元戸田格子の特異多様体がQRT形式に書ける．

4）メビウス変換によって不変な関数を調べるためには保型関数論，不変式論などがある．これは今後の課題である．

予測として次のようなことが考えられる． WTC法によって見いだされた可積分特異多様体を，出来るだけ シュワルツ微分を用い書き下し，メビウス変換で不変な方程式の形にできるならば，メビウス変換は離散変換としても使えるので，適当なメビウス変換は可積分な偏微分方程式の離散表現の構成要素となりえる．以下この状況をWTC法の説明とともに述べる．

特異多様体を $\Phi(z_1, \ldots, z_n)=0$, $u=u(z_1,\ldots,z_n)$ を偏微分方程式の解とするとき，以下のように展開できたとする．

$$u=\Phi^{\alpha}\sum_{j=0}^{00} u_j\Phi^j, \quad u_0\neq 0 \tag{7.4}$$

ここで u_j, Φ^j は$\Phi=0$ 近傍で解析的な関数で，αは整数とする．これが成り立てば偏微分方程式はパンルヴェの性質を持つ．

例１： Kadomtsev-Petviashvili (KP)方程式

$$u_{yy}+ \partial/\partial_x(u_t+uu_x+\sigma u_{xxx})=0 \tag{7.5}$$

Leading order の解析からα=-2であることがわかり，レゾナンスは $u=\Phi^{-2}\sum_{j=0}^{00} u_j\Phi^j$，とすれば，j=-1, 4, 5, 6になる．

$$\begin{gathered}
j=0,\ u_0=-12\sigma\Phi_x^2, \qquad j=1,\ u_1=12\sigma\Phi_{xx}, \\
j=2,\ \Phi_t\Phi_x+4\sigma\Phi_x\Phi_{xxx}-3\sigma\Phi_{xx}^2+\Phi_y^2+u_2\Phi_x^2=0, \\
j=3,\ \Phi_{xt}+\sigma\Phi_{xxxx}+\Phi_{yy}+u_2\Phi_{xx}-u_3\Phi_x^2=0, \\
j=4,\ \text{(Resonance)}\ u_4(\text{Eq. } j=2)_{xx}=0, \\
j=5,\ \text{(Resonance)}\ u_5(\text{Eq. } j=3)_{xx}=0, \\
j=6,\ \text{Conpatibility condiotion between } j=2 \text{ and } j=3
\end{gathered} \tag{7.6}$$

ここで u_4, u_5, u_6 は任意に設定できる．いま u_4, u_5, $u_6 = 0$ ととる．また u_jが有限番目のj からゼロになれば，KP方程式の解が見つかることと同じである．それは u_4, u_5, u_6 =0 に加え u_3 =0 となればよい．これは見かけの特異点を作り，その特異性をΦに背負わせたことに対応する．この条件からΦに関する方程式が得られる．これらの条件より u_2はj=2, j=3の式から求められる．以上から$u_0=-12\sigma\Phi_x^2$， $u_1=12\sigma\Phi_{xx}$ をもとの方程式に代入して，

$$
(7.7)\quad
\begin{aligned}
&u=u_0\Phi^{-2}+u_1\Phi^{-1}+u_2=12\sigma\,\partial/\partial x_2(\ln\Phi)+u_2\,,\\
&u_2+\Phi_t/\Phi_x+4\sigma\Phi_{xxx}/\Phi_x-3\sigma\Phi_{xx}^2/\Phi_x^2+\Phi_y^2/\Phi_x^2=0\,,\\
&\partial/\partial y(\Phi_t/\Phi_x)+\partial/\partial x(\Phi_t/\Phi_x+\{\Phi{:}x\}+1/2\Phi_y^2/\Phi_x^2)=0\,,\\
&\{\Phi{:}x\}=\partial/\partial x(\Phi_{xx}/\Phi_x)-1/2(\Phi_{xx}/\Phi_x)^2\,,\quad \text{シュワルツ微分}
\end{aligned}
$$

ここでΦに関する方程式はメビウス変換（$\phi=(a\phi+b)/(c\phi+d)$, $ad-bc\neq0$）に対して不変なことがわかる.

例２：DΔKdV（時間に関して連続，空間に関して離散的なKdv方程式）

$$
(7.8)\quad \frac{du_n}{dt}=\frac{-2p^2}{(u_{n+1}-u_{n-1})^2}\left(\frac{1}{u_{n+2}-u_n}+\frac{1}{u_n-u_{n-2}}\right)+\frac{1}{u_{n+1}-u_{n-1}}\,,
$$

$$
(7.9)\quad u_n(t)\equiv\omega t+\tilde{u}_n\,,\quad x_n\equiv\frac{1}{\tilde{u}_{n+1}-\tilde{u}_{n-1}}\,,
$$

$$
(7.10)\quad 2p^2x_n^2(x_{n+1}+x_{n-1})+\omega-x_n=0\,.
$$

← QRT系形式 (一次分数型変換）

こうして色々な可積分方程式の特異多様体がメビウス変換，一次分数型変換を許容することがわる．これは特異多様体の解そのものが，QRT系に従って表される可能性を暗示する．

７．４　離散方程式への特異点閉じ込め法（SCM）適用に対する考察

前節の例から特異点閉じ込め法が適用可能で意味ある離散方程式の候補とし，WTC法を適用し見かけの特異点を導入することによって得られる特異多様体が，あるメビウス変換で不変で，それによって厳密な離散表現を持つ場合であることがわかる．有理型関数と関係していることがわかる．

７．５　ある２段階SIMのハミルトニアンに対するSCMの適用例

ここでは特異点閉じ込め法が，アフィン接続を離散的に定めるものであることを暗示する例を紹介する．

次のような２階の離散非線形方程式を例に考える（ｎ階でも扱いは同じ）．

$$
(7.11)\quad f(x_{i+1},x_i,x_{i-1},A(i))=0\,.
$$

便宜上 $A(i)$ はx とは独立であり i を変数にもつ大域的に正則な関数とする．

例　$x_{i+1}x_{i-1}-A_1(i)h_1(x_i)(x_{i+1}+x_{i-1})+h_2(A_2(i)x_i+A_3(i))=0$.

これ以後 $f(x_{i+1},x_i,x_{i-1},A(i))=f_{i+1}$, $f(x_i,x_{i-1},f_{i-2},A(i-1))=f_i$ などと略記する．

$f(x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, A(i)) = 0$ は解 x が多様体とすれば，次のように考えられる．

1）局所解多様体が，x_{i+1}, x_i, x_{i-1} の３つの座標変数で十分に表現できる．
つまりx_iまわりの近傍 x_{i+1}, x_{i-1} の関係を与えている．３点間のローラン展開などが意味あればそれより近似解析多様体が構成できる．

2）$(x_{i-1}, x_i) \to x_{i+1}$, $(x_{i-1}, x_i) \to (x_i, x_{i+1})$ の写像を与えている．

3）解 $x_i \to x_j$ は $f_i = f_j = 0$ を不変量（式）とする移動で与えられる．

2），3）に従い，各f_i が $(x_{i-1}, x_i) \to (x_i, x_{i+1})$ の写像を与えているとすると，SCMは $f_i \to f_{i+1}$ の関係を与えるものと考えられる．以下これを確かめる．

$f(x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, A(i)) = 0$ の場合を考える．各 f_i の全微分を考える．

(7.12) $$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} dx_{i-1} + \frac{\partial f_i}{\partial A(i)} dA(i) = 0 \quad , \ i = 1, \dots,$$

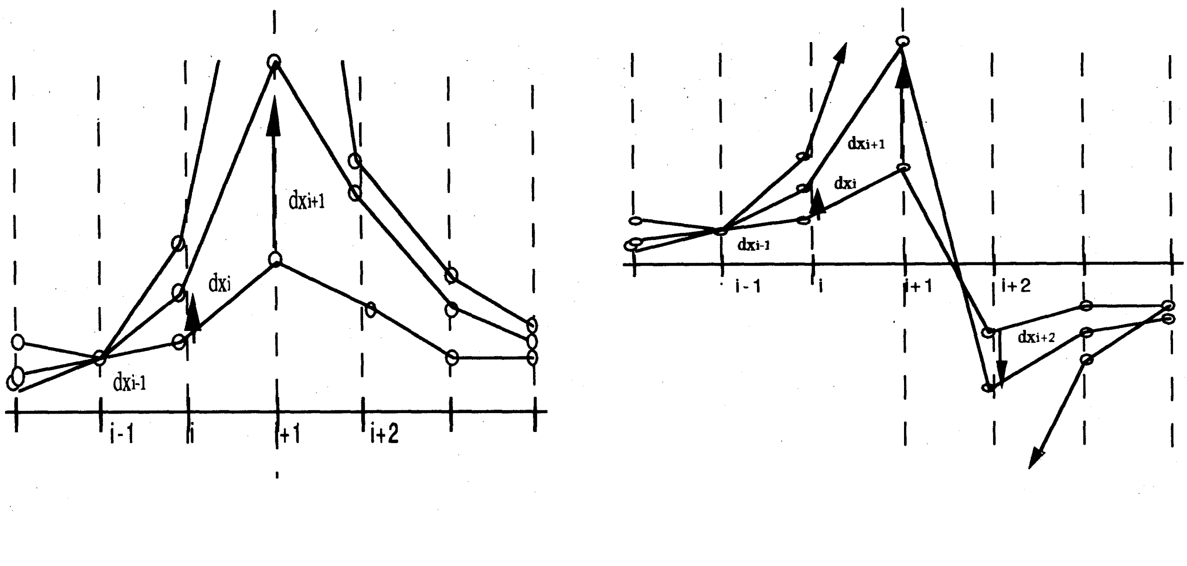
形式的に dx_{i+1} について解くと

(7.13) $$dx_{i+1} = -\frac{1}{\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right)} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} dx_{i-1} + \frac{\partial f_i}{\partial A(i)} dA(i) \right) \quad , \ i=1, \dots,$$

この表現にSCMを適用することを考える．ここで次のような仮定をする．dx_{i-1}, $dA(i)$ を適当に固定し，dx_i を $dx_{i+1} \to \infty$ となるような特異多様体方向の移動を与えるものを考える．つまり次が成り立つような x_i の変動を dx_i とする．

(7.14) $$f_i(00, x_{00}, x_{i-1}, A(i)) = 0 , \quad x_i \to x_{00}$$

x_∞は f_i における特異多様体中の点とする．このとき $x_{i+1} \to \infty$ となる．



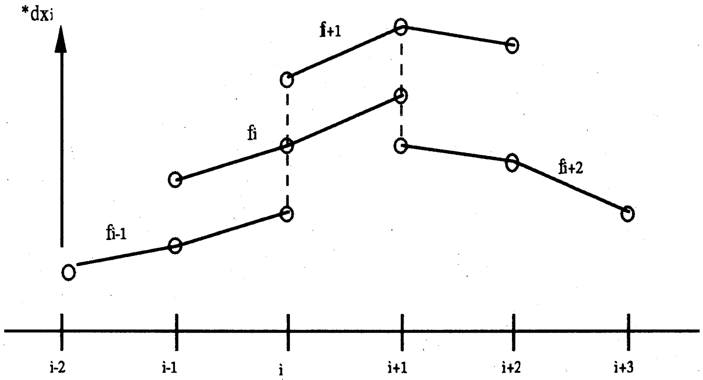
ここで(7.13)と同様にしdx_{i+2}についての式を作り，

$$\text{(7.15)} \quad dx_{i+2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+2}}\right)}\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}}dx_{i+1} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial A(i)}dA(i)\right),$$

(7.13)のdx_{i+1}を(7.15)に代入し，dx_{i+2}が発散しないための条件より次の関係を得る.

$$\text{(7.16)} \quad \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{\partial f(x_{i+2}, x_{i+1}, x_i)}{\partial x_{i+1}}}{\frac{\partial f(x_{i+2}, x_{i+1}, x_i)}{\partial x_i}} = \frac{\frac{\partial f(x_{i+1}, x_i, x_{i-1})}{\partial x_{i+1}}}{\frac{\partial f(x_{i+1}, x_i, x_{i-1})}{\partial x_i}}$$

これは幾何学的解釈ができ f_i の(x_{i+1}, x_i) とf_{i+1} の (x_{i+1}, x_i) の微分係数の比が一定であることを示している．f_i と f_{i+1} のアフィン接続を与える形になっている.



以上の結果より，これまでに定義した，せいぜい動く極を解に持つ一変数離散方程式に特異点閉じ込め法を適用することは，離散表現の意味での各 f_j 間の接続を決定するための条件を与えることに対応することがわかる.

8．まとめと発展

当報告は以下のようなことを示した.

1）リッカチ方程式と離散リッカチ方程式が厳密に対応する場合があること．その場合，背後に昇下降演算子を持つ微分方程式があること.

2）離散リッカチ方程式を用いた連立方程式系は，QRT系と密接な関係があること.

3）パンルヴェ方程式の特解・局所解である連立リッカチ方程式の離散

表現をQRT系に対応させ，その離散表現である特異点近傍の局所連立離散リッカチ方程式の候補と見なせること.

4）この局所連立離散リッカチ方程式に特異点閉じ込め法を適用することは，各特異点近傍の局所離散パンルヴェ方程式の接続を定めることに対応すること.

5）特異点閉じ込め法を微分形式に直接適用する試みをした.

他の研究分野での成果と以上の結果との関係が多く見いだせる．今後この研究分野を発展させる方向は非常に多く残されている．例えば，特異点を持つ微分方程式の離散表現を求めるスキームを見いだすことである．以上の結果より次のようなスキームが考えられる． 1） WTC法に代表される特異多様体（関数要素）の満たす離散方程式を，その特異点まわり（多様体近傍）の局所離散方程式とみなす．それは連立離散リッカチ方程式等であり，特異多様体の解の性質が反映される． 2）特異点まわりの厳密な（局所）離散方程式を，本来の方程式に合うよう，組み合わせる． 3）特異点閉じこめ法などと，定数変化法を組み合わせ用い，各局所離散方程式の接続（大域化）をする．特異点の数等の釣りあい，種類の違い等の考慮をする． 4）変数変換による別の意味ある表現への書き換え， 5）離散方程式の連続極限への移行，離散ハミルトニアン力学系の構成など，応用を試み確認する．その他の発展例としては，別の離散パンルヴェ方程式表現を見つけ分類すること，第6種離散パンルヴェ方程式を作ること，多変数高階の離散パンルヴェ方程式表現を見いだしたり，以上の解を見つけることや，また種々のソリトン方程式の離散化手法との関係，特異点閉じ込め法を拡張したり，ハミルトン系のシンプレクティック構造を保存するシンプレクティック数値積分法と融合させたり，離散方程式の代数関数，代数幾何，保型関数論を用いたリーマン面，積分多様体の決定法から統一的な扱い，射影モノドロミーとの関係とその一般化としてのτ関数との関係を考えるなどである．可積分方程式の離散表現を作る統一的な方法を射影空間で見いだすことである．もっとも素朴なものとして，高階微分方程式を一階の微分方程式系に書き直したものの離散表現を考える場合，点変換として一階微分まで厳密に保存，発展させるような離散方程式系が厳密にその高階微分方程式に対応するのではないかという問題，実際の問題に適用し，計算機でシミュレーション結果を評価することである.

謝辞

当研究を進めるにあたり有益なる御助言と励ましを頂いた前田茂，三井斌友両先生，名古屋大学工学部情報工学教室の方々に感謝します．また当研究は平成６年度科学研究費補助金のもとで行なわれた．援助していただいた池邊八洲彦先生に感謝します．

参考文献

[1] Agarwal R. *P., Difference Equations and Inequalities* (1992), Marcel Dekker.

[2] Ahlfors L. A., *Complex Analysis*. 3rd ed. (1979), McGraw-Hill.

[3] Gibbon J. D. and Tabor M. , *J. Math. Phys.*, 26, 8 (1985) 1956-1960.

[4] Grammaticos B., Ramani A. and Papageorgiou V. , *Phys. Rev. Lett.*, 67 , 14 (1991), 1825-1828.

[5] Itoh T. and Cai D., 日本応用数理学会 論文誌, 3 , 4 (1993), 337-351.

[6] Kajiwara K., Ohta Y. and Satsuma J., 京都大学数理解析研究所 発表原稿 (1993)

[7] Mickens R. E., *Difference Equations 2nd ed.* (1987), Van Nostrand Reinhold, New York.

[8] Papageorgiou V. G., Nijhoff F. W., Grammaticos B. and Ramani A., *Phys. Lett.* A, 164 (1992) 57-64.

[9] Quispel G. R. W., Roberts J. G. A. and Thompson C. J., *Phys. Lett.* A, 126, 7 (1988), 419-421.

[10] Quispel G. R. W., Roberts J. A. G. and Thompson C. J., *Physica* D, 34 (1989), 183-192.

[11] Ramani A., Grammaticos B. and Hietarinta J., *Phys. Rev. Lett.*, 67, 14 (1991), 1829-1831.

[12] Ramani A. , Grammaticos B. and Satuma J. , *Physics Letters A*, 169 (1992), 323-328.

[13] 田村二郎, 数学選書 解析関数 (1985), 裳華房.

[14] Weiss J., Tabor M., and Carnevale G., *J. Math. Phys.* 24, 3 (1983), 522-526.

[15] Weiss J., *J. Math. Phys.*, 26, 9 (1985) 2174-2181.

[16] 岡本和男，パンルヴェ方程式序説，上智大学数学講究録19.

[17] K. Okamoto, *Physica* 2D (1981), 525-535.

[18] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, *From Gauss to Painleve*, Vieweg 1991.

[19] Clarkson. P. A., *Phys. Lett. A*, to be published.

伊藤利明　〒657　兵庫県神戸市灘区六甲台町２-１
神戸大学経営学部．Email: titoh@icluna.kobe-u.ac.jp
蔡　東生　〒305　茨城県つくば市天王台１-１-１
筑波大学電子情報工学系．Email: cai@iris.is.tsukuba.ac.jp